特集

数式処理を用いた設計技術

Design Technology Based on Symbolic Computation

あらまし

様々な「ものづくり」における設計問題など理工学・産業上の広範な問題は，制約解消や最適化問題として定式化される。それらを処理する技術は，現在のところ数値計算技術がベースとなっている。しかし，実用上重要な多くの問題が数値的計算法では取扱いが困難な非凸な問題となることが明らかになっている。そのため，非凸な問題にも有効な最適化手法の開発が望まれている。

本稿では，数式処理による最適化を用いた設計手法を紹介する。まず，非凸最適化の基本となる代数的な算法QE（Quantifier Elimination）を紹介し，つぎに，制御系設計への適用例により本手法の有効性を示す。さらに，実際のものづくりへの応用として，HDD設計における磁気ヘッドスライダ形状最適化への適用例を紹介する。

Abstract

A wide variety of problems arising in the fields of science and engineering, such as design problems in *monozukuri* (manufacturing), can be formulated as constraint-solving or optimization problems. Currently, most technologies for constraint solving and optimization are based on numerical computation. Unfortunately, it has turned out that many important practical problems cannot be reduced to non-convex optimization problems. In general, non-convex problems cannot be reliably solved by numerical optimization techniques. Thus, making progress in solving non-convex optimization problems has a significant impact on those applied areas. This paper presents an algebraic approach for parametric optimization which can be utilized for non-convex design problems. First, we introduce the symbolic optimization method based on quantifier elimination (QE). Second, we extend this symbolic method to design a robust control system which satisfies multiple specifications. Finally, we show the application of this method to shape optimization in magnetic head for HDD design.

穴井宏和
（あない　ひろかず）

ITシステム研究所デザインイノベーション研究部 所属
現在，数値・数式ハイブリッド計算のアルゴリズムと設計への応用の研究に従事。

金児純司
（かねこ　じゅんじ）

ITシステム研究所 所属
現在，数値・数式ハイブリッド計算のアルゴリズムと設計への応用の研究に従事。

屋並仁史
（やなみ　ひとし）

ITシステム研究所デザインイノベーション研究部 所属
現在，数値・数式ハイブリッド計算のアルゴリズムと設計への応用の研究に従事。

岩根秀直
（いわね　ひでなお）

ITシステム研究所デザインイノベーション研究部 所属
現在，数値・数式ハイブリッド計算のアルゴリズムと設計への応用の研究に従事。

ま　え　が　き

近年，ものづくりの現場で開発対象の複雑化や開発期間の短縮化が進むにつれ，モデルベース設計が注目されるようになってきた。モデルベース設計は，設計・開発対象の特性を記述する数式モデルをベースに，熟練技術者個人のスキルに依存しない標準的なプロセスの確立を目指したものである。数式モデルを導入することで，設計問題は数理制約問題・最適化問題として扱うことが可能になり，数理的手法を適用することで設計プロセスが見通し良くなることが期待されている。

モデルベース設計によって，効率化・コスト削減・高付加価値化を実現していく上でかぎとなるのが，数理制約問題処理技術や最適化技術である。現在のところ，これらの技術は，数値的な計算を前提とした各種アルゴリズムに支えられている。しかし，計算機の飛躍的な性能向上に伴ってこれらの技術の普及が進むとともに，多くの実用上重要な問題が，数値的な計算を前提とする技術だけでは本質的な解決が難しいことが明らかになってきている。このような状況を打開する有効な手段として注目され始めたのが，計算機パワーのもう一つの活用技術である記号・代数計算技術，すなわち数式処理技術である。

本稿では，数式処理による最適化[(1),(2)]を用いた設計手法を紹介する。まず最適化の視点から数値計算との相補的な関係を軸に数式処理の特徴を述べる。つぎに，基本となる要素技術として，代数的な最適化手法QE（Quantifier Elimination，限量記号消去）を紹介し，制御系設計への応用を例にその有用性を説明する。さらに，実際のものづくりへの応用として，HDD設計における磁気ヘッドスライダ形状最適化への適用例を紹介する。

数値最適化に基づく設計と課題

数値最適化に基づく設計手法が各分野で精力的に研究されている。とくに，解析・設計問題を凸最適化問題に帰着させ，数値的凸最適化手法を用いて解く方法は，これまで解析的に解けなかった問題に対しても大域的な最適解を導くための手段として有望視されるようになっている。

しかし，このように有望視されている数値計算ベースの設計手法にも，いくつかの課題が残っている。最大の問題は，多くの実用的な設計問題が凸最適化問題に帰着できないという事実である。設計パラメタが与えられた場合に，設計仕様が満たされるかどうかを判定する解析問題では，かなり広いクラスの問題が凸制約・最適化問題として数値計算によって取扱い可能である。しかし，同じ仕様について設計問題を考えると，設計パラメタについてのパラメトリックな制約問題となり，一般に非凸な制約問題となるケースが多い。このように設計問題が非凸となる場合，最近ではもとの非凸最適化問題を巧みに凸問題に緩和し数値最適化を適用することで設計を行う方法も提案されている。しかし，保守的でない解や大域的な解を正確に求めることや，実行可能解をすべて可能領域として求めることは，非常に困難である。また，実行可能解は数値つまりパラメタ空間内の点として得られるために，ロバストな設計（製造誤差に対する感度の最小化）に向けた検討を行うことは一般に容易ではない。

数値計算に基づく設計では，設計パラメタを変えて数値シミュレーションを繰り返して，所望のパラメタ値を求めるため，パラメタの選択などは，設計者の知識や経験に依存することになる。また，設計品質を向上させるためには通常，多くのシミュレーションの繰り返しが必要となるが，開発や製品化の納期などの時間的制約がある場合には，設計者はとりあえず解が見つかるとその解で妥協することが強いられる。さらには，解がない問題に対して，解の探索を延々と継続してしまうリスクを回避できないといった点が課題として残る。

数式処理による最適化

数式処理は，文字どおり式（多項式）の操作を基本としているため，そのアルゴリズム（代数的算法）はパラメタをシンボリックに扱うことが可能で「パラメトリック最適化」の有効な計算技法となっている。すなわち，制約問題に対して実行可能解をパラメタ空間の中の領域として求めることができ，その結果として，いわゆるパラメタ空間法による設計が系統的に実現できることになる。また，最適化問題において最適値を，パラメタを含んだ形で構成することができるため，パラメタ値が異なる問題に対しておのおの最適化を繰り返すことが不要となり，最適値とパラメタの依存関係が明示的に（正確に）

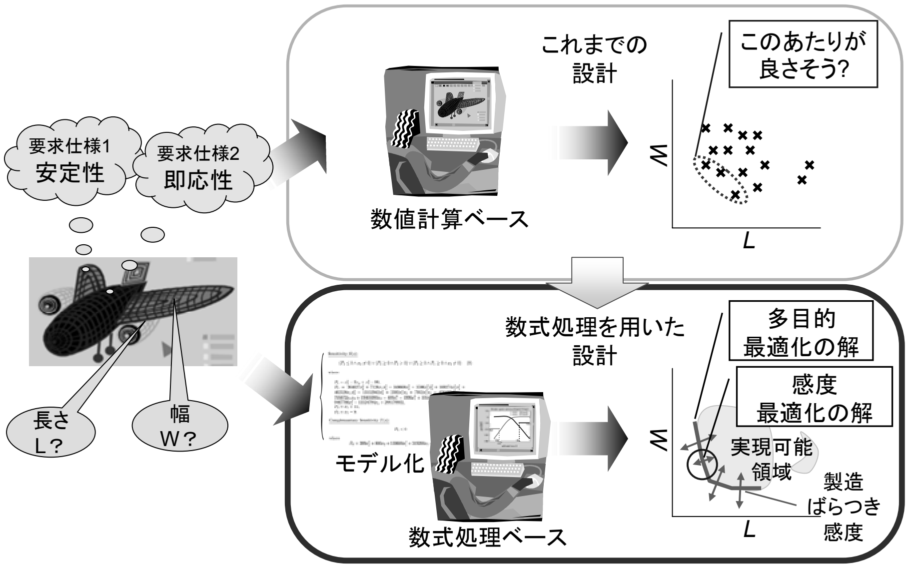


図-1　数式処理を用いた設計フローの特徴
Fig.1-Feature of design flow based on symbolic computation.

把握できる。さらに，数式処理を用いる最適化では非線形性や非凸性を持つ問題の場合も同様に取り扱うことができる点も大きな特長である。したがって，これらの性質を活用すれば，数式処理に基づく最適化により，大域的な最適解を求めるのが困難な非凸最適化に対しても正確な大域的最適解を得ることができることになる（図-1）。

数式処理によるパラメトリック最適化を実現するための基本要素技術として，QEと呼ばれる算法がある。これについて簡単に紹介する。QEは，多項式等式，不等式，限量記号（∀，∃），そしてブール演算（∧，∨，⇒，¬など）から成る一階述語論理式に対し，等価で限量記号を含まない式を導く算法である。その式は入力式が真であるための限量記号のない変数の可能な領域を示す。

例えば，式

$$\forall x\ (x^2+bx+c>0)$$

に対しQEによって等価な式

$$b^2-4c<0$$

が導かれる。さらに，4変数x，y，z，wの不等式から成る式ϕ

$$\phi := (4x-w^2=0 \wedge x-xy-z+5=0 \wedge 1\le x\le 4 \wedge 1\le y\le 2)$$

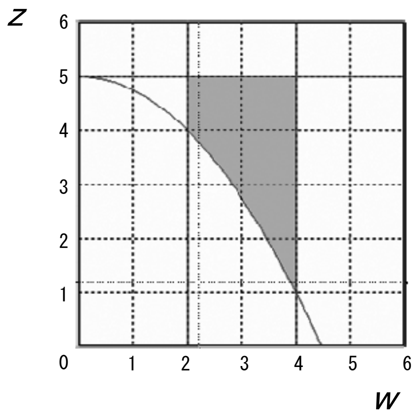


図-2　QEの計算例：実行可能解
Fig.2-Example: Feasible solution for QE problem.

を考えると，式ϕを満たす変数zとwの実行可能領域を求める問題は，QEの問題

$$\exists x \exists y\ \ \phi \qquad \cdots (1)$$

として記述できる。QEによって（1）に等価な式

$$(w-2\ge 0 \vee w+2\le 0)\wedge w+4\ge 0\wedge w-4\le 0 \wedge z-5\le 0\wedge 4z+w^2-20\ge 0 \qquad \cdots (2)$$

が導かれる。（2）は式ϕを満たす変数zとwの実行可能領域を表しており，図-2に示す領域となっていることが分かる。

全変数に限量記号が付いているとき（決定問題）には，QEは入力式の真偽を判定する。したがって，

制約問題や最適化問題の代数的手法としてQEは以下の特長を持っている。

(1) すべての実行可能解をパラメタ空間内の領域（等式・不等式のブール的組合せである半代数的集合）として正確に求めることができる。

(2) 非凸な最適化問題も正確に解くことができる。

(3) 実行可能解が存在しない場合も正確に判定できる。

QEをうまく用いることにより，様々な解析・設計問題から得られる制約・最適化問題をパラメトリックに正確に解くことができるようになり，設計の効率化・高度化を図ることが可能となる。[3],[4]

ロバスト制御系設計への応用

本章では，制御系設計問題[3]へのQEの応用例を紹介する。ここでは，**図-3**に示すフィードバック制御系の設計について考える。

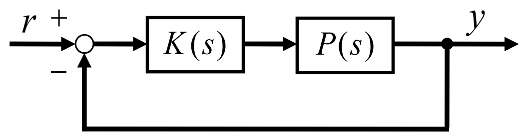


図-3　フィードバック制御系
Fig.3-Feedback control system.

ここで，r はこの制御系の入力で，y は出力とする。また，$P(s)$，$K(s)$ はそれぞれ，制御対象，制御器の伝達関数（transfer function）である。

● 例1：制御系の安定化

ここでは以下の場合を考える。

$$P(s)=\frac{4}{s^2-2s+2},\qquad K(s)=a\frac{s+b}{s+ab}$$

制御器の二つのパラメタ a と b には次のような物理的制約があるとする。

$$1<a<10,\qquad b>0 \qquad \cdots(3)$$

一般に，制御対象の伝達関数の極がすべて複素平面の左半面にあるとき，制御対象は安定（またはフルビッツ安定）であるが，ここで考えている制御対象 $P(s)$ は，極(注)が $1\pm\sqrt{-1}$ であるため不安定なシステムである。そこで，二つのパラメタ a と b を適切な値に調整することで図-3のフィードバック制御系を安定化することを考える。制御系全体が安定になるための条件は，r から y への閉ループ系の伝達関数

$$G(s)=\frac{KP}{1+KP}$$
$$=\frac{4a(s+b)}{s^3+(ab-2)s^2+(2+4a-2ab)s+6ab}$$

の分母多項式（特性多項式とも呼ばれる）の解がすべて複素平面の左半面にあることで，a と b についての条件として

$$6ab>0\wedge ab-2>0\wedge$$
$$(ab-2)(2+4a-2ab)-6ab>0$$

が得られる。これを $\psi(a,b)$ と書くことにする。これはよく知られた判別条件（フルビッツの判定条件）から簡単な代数的計算によって直ちに得られるものである。

したがって，制御器の物理的な制約（3）のもとで系全体が安定であるための b の条件を半代数的集合として求める問題は，つぎのように記述できる。

$$({}^{\exists}a)[1<a<10\wedge b>0\wedge\psi(a,b)] \qquad \cdots(4)$$

QEによって，（4）と等価な限量記号のない式

$$50b^2-100b+21<0$$

を得る。この結果，（3）のもとで系全体が安定であるためのパラメタ b の可能領域が

$$\left(1-\frac{\sqrt{58}}{10},\ 1+\frac{\sqrt{58}}{10}\right)$$

であることが分かる。（このように，b の下限・上限値が代数的数として与えられるので，いくらでも精度よく計算することができる）

● 例2：安定性と混合感度制約

図-3と同じフィードバック制御系の設計について，

$$P(s)=\frac{1}{s^2+s+1},\qquad K(s)=x_1+\frac{x_2}{s}$$

の場合を考える。ここで，$x=(x_1,x_2)$ と書く。制御器 $K(s)$ は二つのパラメタ x_1，x_2 を持つPI制御器である。このとき特性多項式は

$$s^3+s^2+(x_1+1)s+x_2$$

となる。

まず，フィードバック系が安定であるための必要十分条件は（フルビッツの判定条件から），PI制御

（注）　s についての分母多項式の零点。

ゲインxに関し，

$$\theta(x) = (x_2 > 0 \wedge x_1 - x_2 + 1 > 0)$$

と記述できる｛(図-4（a)｝。

つぎに，制御系の速い応答性とノイズ耐性を保証するために，このフィードバック制御系に対する感度関数$S(s)$と相補感度関数$T(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1+PK} = \frac{s^3+s^2+s}{s^3+s^2+(x_1+1)s+x_2},$$

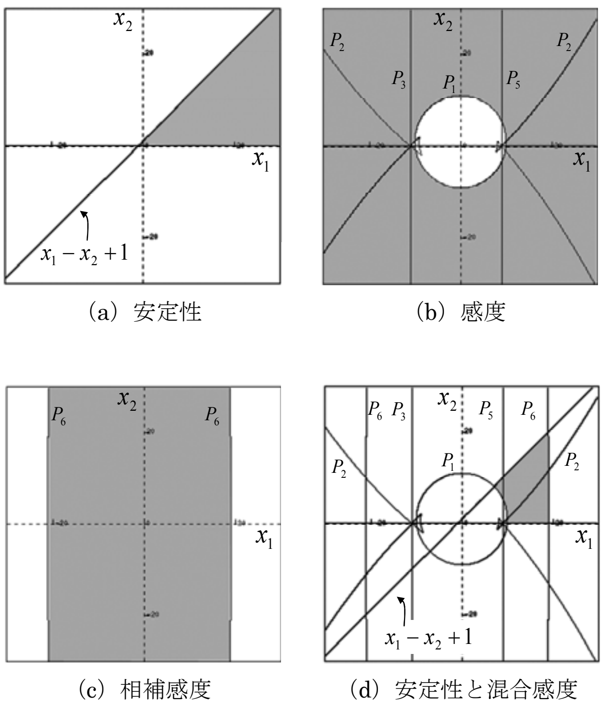
$$T(s) = \frac{PK}{1+PK} = \frac{x_1 s + x_2}{s^3+s^2+(x_1+1)s+x_2}$$

を考える。感度関数Sは，系の応答性を表す関数で，相補感度関数Tはロバスト安定性を表す関数である。このとき，制御系に対する要求仕様は，限定された周波数帯域におけるH_∞ノルム制約，

$$\|S(s)\|_{[0,\ 1]} = \max_{0\le\omega\le1}\left\|S(\sqrt{-1}\omega)\right\| < 0.1 \qquad \cdots（5）$$

$$\|T(s)\|_{[20,\ \infty]} = \max_{20\le\omega\le\infty}\left\|T(\sqrt{-1}\omega)\right\| < 0.05 \qquad \cdots（6）$$

の形で記述できる。この二つのH_∞ノルム制約として記述された仕様を同時に満たすような制御器を求める問題は，混合感度問題（mixed sensitivity problem）と呼ばれている。実は，二つの要求仕様（5）と（6）は基本的には相反する要求である。そこで，ロバスト安定性が強く要求される周波数帯域（一般に高い）と応答性が要求される周波数帯域（一般に低い）は異なるので，このような重要な周波数帯域の違いを利用して両方の要求に対するバランスを取りながら，ある種最適なトレードオフを行い，全体として良い制御特性を得ようとするのがこの要求仕様の意味するところである。数値計算による方法では，系統的に解決するのは難しい問題であるが，QEを用いれば系統的な解決法が得られる。



（a）安定性　（b）感度

（c）相補感度　（d）安定性と混合感度

図-4　安定性と感度制約に対するxの可能領域

Fig.4-Possible regions of x for stability and sensitivities (a) stability, (b) sensitivity, (c) complemetary sensitivity, (d) stability with sensitivities.

周波数限定H_∞ノルム制約（5）と（6）は，それぞれ以下の一変数多項式の正定条件に帰着できる（主変数zに特に物理的な意味はない）。

$$\forall z > 0 \quad [(x_2^2 - 2x_2 + x_1^2 - 99)z^3 + (2x_2^2 - 4x_2 + 2x_1^2 + 2x_1 - 99)z^2 + (3x_2^2 - 2x_2 + x_1^2 + 2x_1 - 99)z + x_2^2 > 0],$$

$$\forall z > 0 \quad [(z^3 + (-2x_1 + 1199)z^2 + (-2x_2 - 399x_1^2 - 1598x_1 + 479201)z - 399x_2^2 - 800x_2 - 159600x_1^2 - 319200x_1 + 63840400 > 0]$$

このような形の条件を定符号条件（SDC：sign definite condition）と呼ぶ。QEをこれらのSDCに適用することで制約（5）と（6）を満たすxの実行可能領域が得られる。QEを用いれば，感度関数制約（5）を満たすxの可能領域は

$$(P_3 \le 0 \wedge x_2 \ne 0) \vee (P_1 \ge 0 \wedge P_2 > 0) \vee (P_5 \ge 0 \wedge P_1 \ge 0 \wedge x_2 \ne 0)$$

に変換できる。ここで，P_i（i＝1，2，3，5）は，

$$P_1 = x_2^2 - 2x_2 + x_1^2 - 99,$$

$$P_2 = 264627x_2^4 + 7128x_1x_2^3 - 349668x_2^3 - 3596x_1^3x_2^2 + 169274x_1^2x_2^2 + 462528x_1x_2^2 - 13152942x_2^2 + 2392x_1^4x_2 + 7952x_1^3x_2 - 426492x_1^2x_2 - 705672x_1x_2 + 19405980x_2 - 400x_1^6 - 1996x_1^5 + 105419x_1^4 + 352836x_1^3 - 9467766x_1^2 - 15524784x_1 + 288178803,$$

$$P_3 = x_1 + 11,$$

$$P_5 = x_1 - 9$$

のようなパラメタ x_1，x_2 に関する多項式である。制約（5）を満たす x_1，x_2 の可能領域を図示すれば，図-4（b）の非凸領域部分（網かけ部分）のようになる。また，相補感度関数制約（6）を満たす x の可能領域は

$$P_6 < 0$$

となる。ここで

$$P_6 = 399x_2^2 + 800x_2 + 159600x_1^2 + 319200x_1 - 63840400$$

である。制約（6）を満たす x_1，x_2 の可能領域を図示すれば，図-4（c）の網かけ部分のようになる。

パラメタ空間設計法の利点の一つは，複数の設計仕様に対する対応が容易にできることである。単にそれぞれの仕様を満たす制御器のパラメタ x の可能領域の重ね合せ（条件式の論理積）をとればよいのである。この例では，図-4（a）（b）（c）を重ね合わせることで得られる x の可能領域が図-4（d）の非凸の網かけ部分である。この非凸領域が安定性と混合感度の要求仕様をすべて満たすような x の実行可能領域をすべて正確に示している。このような形でパラメタ空間内に可能領域がすべて求まることが最終的に実機に採用する設計パラメタの値を選択する際に非常に有効である。例えば，可能領域の中心辺りの値を選ぶことで，誤差や製造ばらつきに対してよりロバストな設計を実現する設計パラメタの値を得ることができる。

計算ツール

開発技術の実用化を進める上で，実際のユーザが使いやすいツールやプラットフォームを構築し提供することも重要である。QEのツールとしては現在いくつか存在するが,[1] 著者らは，QEだけでなくQEに基づいた数値・数式ハイブリッド最適化手法まで含んだツールをSyNRAC（Symbolic-Numeric Toolbox for Real Algebraic Constraints）という名称で数式処理システムMaple上のツールボックスとして開発中である。さらに，SyNRACを計算のエンジンとして，本稿で示した数式処理を用いた設計手法に基づく汎用的なロバスト制御系設計ツールも開発中である。[3] これまでの数値的なシミュレーションによる制御系の解析手法を融合した形でMapleおよびMATLABのツールボックスとして実装している。このツールを利用することで，設計者は設計対象のモデルと設計したい制御器を入力し，設計仕様を入力するだけで，設計仕様を満足する制御器のパラメタが取り得る可能領域を，明示的に可視化された形で得ることができる。

形状最適化設計への応用

ものづくりへの適用例として，HDDの磁気ヘッドスライダ形状最適化設計への応用について紹介する。スライダ（**図-5**）は，先端の磁気ヘッドで情報の読取り/書込みを行う役割を担っており，ディスクに近いほど読取り/書込みエラーが少なくなるが，一方でディスクに接触するとクラッシュの原因になる。そのため，スライダとディスク面を適度な距離になるように動作させることが望まれる。スライダはディスクの回転で生じる空気の流れで浮上しており，浮上量は高度（気圧）などの環境変化によっても変化する。また，浮上時の角度も，アームの位置により空気の流れが変わることや，スライダに縦・横方向への回転が生じることなどで変化する。スライダの浮上量や姿勢は，先端にあるABS（Air Bearing Surface）の形状を工夫することによって調整がなされている。したがって，HDD磁気ヘッドの設計では，適切なスライダの浮上量や安定な位置・姿勢を実現するためのABSの形状設計が重要になる。

ABSの形状設計問題（**図-6**）は，様々な高度下での浮上量が小さいことや姿勢の安定度など複数の設計仕様（目的関数）を同時に最適化する多目的最適化問題として定式化できる。

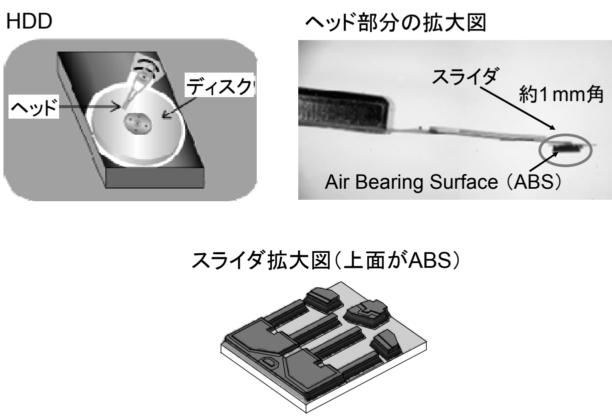
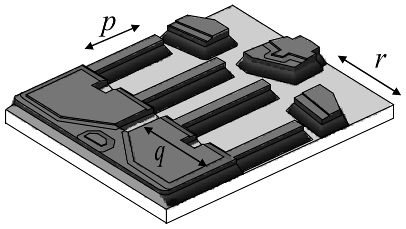


図-5　HDDの磁気ヘッドスライダ
Fig.5-Slider of magnetic head for HDD.

■ ABS形状　$\mathrm{x} = (p, q, r, \ldots)$

p, *q*, *r*, … はスライダ形状を決めるパラメタ



⇒ 浮上計算（レイノルズ方程式）

スライダ形状から，
フライハイト，ロール，ピッチ…
を計算

⇓

目的関数
（コスト関数）

フライハイト
ロール
ピッチ
…

■ ABS形状最適化

複数の目的関数を同時に小さくする
ABS形状（パラメタ x）を求める

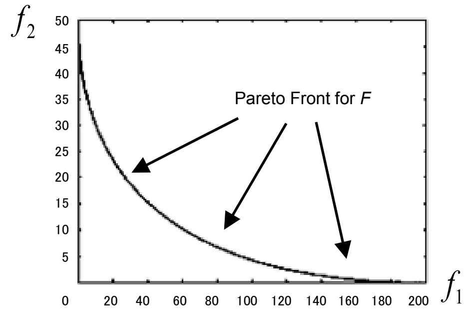
⇒ 多目的最適化

$$\begin{cases} \min_{x \in R^N} imize & f = \{f_1(x), \ldots, f_7(x)\} \\ subject\ to & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \end{cases}$$

図-6　ABS形状設計問題
Fig.6-Shape design problem of ABS.

■ 従来技法によるPareto計算

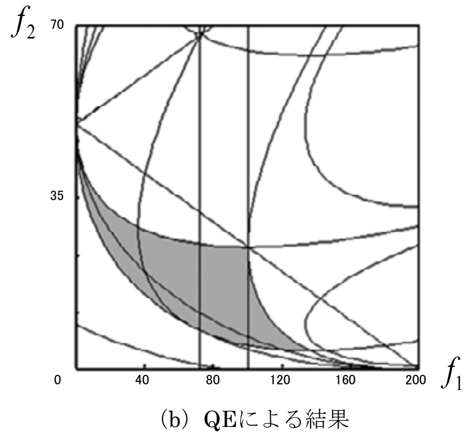
$$minimize \quad F = \{f_1(x,y), f_2(x,y)\}$$
$$f_1(x,y) = 4x^2 + 4y^2$$
$$f_2(x,y) = (x-5)^2 + (y-5)^2$$
$$0 \ge (x-5)^2 + y^2 - 25$$
$$0 \ge -(x-8)^2 - (y+3)^2 + 7.7$$
$$0 \le x \le 5$$
$$0 \le y \le 3$$



（a）従来技法（数値計算）による結果

■ QEによるPareto計算

$$^\exists x\, ^\exists y\{(4x^2 + 4y^2 - f_1 = 0 \wedge$$
$$(x-5)^2 + (y-5)^2 - f_2 = 0 \wedge$$
$$(x-5)^2 + y^2 - 25 \le 0 \wedge$$
$$-(x-8)^2 - (y+3)^2 + 77/10 \le 0 \wedge$$
$$x \ge 0 \wedge x \le 5 \wedge y \ge 0 \wedge y \le 3)\}$$



（b）QEによる結果

図-7　パレートラインの計算
Fig.7-Computation of Pareto line.

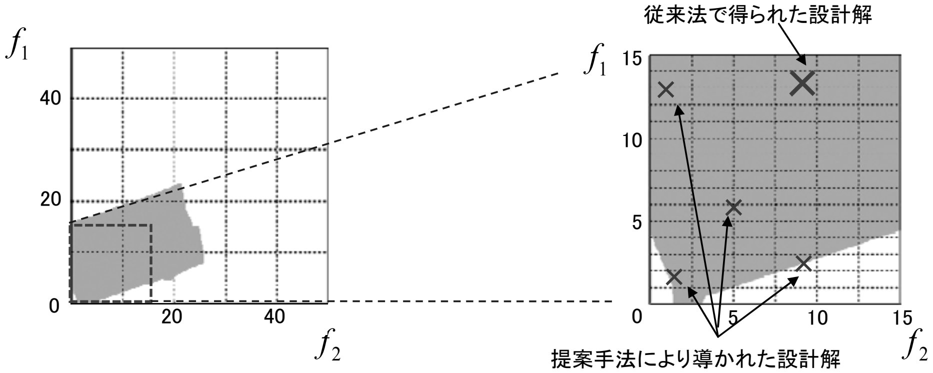


図-8　パレート解（従来技術との比較）
Fig.8-Evaluation of Pareto solution.

著者らは，QEに基づく新しい多目的最適化手法を考案した。以下の例では，二つの目的関数 f_1，f_2 のトレードオフ関係を示すパレートラインを数値的に求めたものが**図-7**（a）で，QEを用いた方法で得られたものが図-7（b）である。

QEによる方法では，正確な式を用いて可能領域も求められており，f_1，f_2 の取り得る可能領域まで求まっている。このQEに基づく手法を，実際のABS設計に適用しその有効性を実証した。

図-8は，あるABS形状に対するある二つの目的関数 f_1，f_2 の可能領域を示したものである。これまでの単目的化による数値最適化の手法で得られた設計解に比べ，効率的かつ正確にパレート解を構成することが可能となり，また，数値最適化の手法で得られた設計解よりも，どちらの目的関数に重点をおいてどのぐらいまで最適化できそうかといった知見も得ることが可能になった。その結果，実際の設計工数の大幅な削減が実現できた（ある設計工程では，14日間かかっていたものを1日に短縮できた）。

む　す　び

本稿で紹介した数式処理を用いた設計手法は，数理モデルで記述できる対象（系）一般に適用するものであり，ここで紹介した事例だけでなく，物理系や生体系[4]の解析やモデルのパラメタ決定などに適用する試みも現れてきている。実際のものづくりへの応用としてHDDの磁気ヘッドスライダ形状最適化の事例を紹介したが，様々な分野で注目されており，例えば，回路設計，信号処理や自動車づくりにおける様々な設計・検証など多岐にわたる領域での適用が検討され始めている。

参 考 文 献

(1)　穴井宏和ほか：計算実代数幾何入門（I）～（V）．数学セミナー，日本評論社，2007年11月～2008年4月まで5回連載．

(2)　H．Yanami，et al．：The Maple package SyNRAC and its application to robust control design. *Future Generation Comp．Syst，*Vol.23，No.5，p.721-726（2007）．

(3)　穴井宏和ほか：数式処理によるロバスト制御系設計．計測と制御 Vol.44，No.8，p.552-557（2005）．

(4)　穴井宏和ほか：計算機代数に基づく生物学－Algebraic Biology．人工知能学会誌 p.77-84，2007年1月号．